Об интегральных уравнениях Вольтерра с дельта-образными ядрами дробно-нагруженных краевых задач

Искаков С. А.[1], Рамазанов М. И.[2], Токешева А. С.[3]

[1]Искаков Сагындык Абдрахманович / Iskakov Sagyndyk Abdrahmanovich – докторант PhD;
[2]Рамазанов Мурат Ибраевич / Ramazanov Murat Ibraevich – доктор физико-математических наук, профессор;
[3]Токешева Айжан Саясатовна / Tokesheva Ayzhan Sayasatovna – магистрант,
кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений,
Карагандинский государственный университет им. Е. А. Букетова, г. Караганда, Республика Казахстан

Аннотация: *в статье рассматривается первая краевая задача для нагруженного уравнения теплопроводности в четверти плоскости. Нагруженное слагаемое – след производной дробного порядка на многообразии $x=t$. Решение задачи сводится к исследованию особого интегрального уравнения Вольтерра второго рода с ядром, имеющим сильную особенность. Показано, что особое интегральное уравнение Вольтерра имеет непустой спектр при $1/2 \le \beta < 1$, т.е. имеет ненулевые собственные функции.*

Ключевые слова: *нагруженное уравнение, дробная производная, особое интегральное уравнение Вольтерра, нетривиальное решение.*

Дифференциальные уравнения с частными производными дробного порядка являются математическими моделями различных процессов и явлений в средах с фрактальной структурой [1]. При этом существенно то, что в рамках математического аппарата интегро-дифференцирования дробного порядка удается не только более глубоко осознать известные данные, но и получить принципиально новые результаты.

В монографии [2] нагруженные дифференциальные уравнения интерпретируются как слабые или сильные возмущения дифференциальных уравнений. В работах [3] – [6] показано, что если в дифференциальном уравнении параболического типа нагруженное слагаемое – значения искомой функции или ее производных первого порядка на многообразии $x=t$, то нагруженное слагаемое – *слабое* возмущение. Если же нагруженным слагаемым является значение производной второго порядка искомой функции на многообразии $x=t$, то нарушается единственность решения первой краевой задачи, то есть в этом случае нагрузку можно интерпретировать как *сильное* возмущение [2].

Целью данной работы является выяснение характера нагрузки дробного порядка $(1+\beta)$, $\frac{1}{2} \le \beta < 1$ в вопросах разрешимости первой краевой задачи для уравнения теплопроводности**.**

В области $Q=\{(x,t), x>0, t>0\}$; $\frac{1}{2} \le \beta < 1$, рассмотрим краевую задачу

$$u_t - u_{xx} + \lambda \cdot \left\{{}_0D_x^{1+\beta} u(x,t)\right\}_{x=t} = f(x,t), \qquad (1)$$

$$u(x,0)=0;\ u(0,t)=0. \qquad (2)$$

Здесь λ - комплексный параметр,

$${}_0D_x^{1+\beta} u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^x \frac{u(\xi,t)}{(x-\xi)^\beta}d\xi\right)$$ -дробная производная Римана-Лиувилля порядка $(1+\beta)$, $0<\beta<1$, $t^{-1/2}e^{-t}\cdot\left[\ {}_0D_x^{1+\beta}u(x,t)\ \right]_{x=t} \in L_1(0,\infty)$,

$$e^{-t}\cdot\left[{}_0D_x^{1+\beta}\int_0^t\int_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)\cdot f(\xi,\tau)d\xi d\tau\right]\Bigg|_{x=t} \in L_1(0,\infty), \qquad (3)$$

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4t}\right)\right]$$ - функция Грина.

Обратим дифференциальную часть задачи (1) – (2),

$$u(x,t) = -\lambda\int_0^t\int_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)\left\{\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^x\frac{u(\xi,\tau)d\xi}{(x-\xi)^\beta}\right\}\Bigg|_{\xi=t} d\xi d\tau +$$

$$+\int_0^t\int_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)\cdot f(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

и с учетом соотношения:

$$\int_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)d\xi = erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)$$

получим следующее представление решения задачи (1) – (2):

$$u(x,t) = -\lambda\int_0^t erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\left\{\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^x \frac{u(\xi,\tau)d\xi}{(x-\xi)^\beta}\right\}\Bigg|_{\xi=t} d\tau +$$

$$+\int_0^t\int_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)\cdot f(\xi,\tau)d\xi d\tau. \qquad (3)$$

Введем обозначение

$$\mu(\tau) = \left\{\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^x \frac{u(\xi,\tau)d\xi}{(x-\xi)^\beta}\right\}\Bigg|_{x=t}, \qquad (4)$$

тогда соотношение (3) запишется в виде:

$$u(x,t) = -\lambda\int_0^t erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\cdot\mu(\tau)d\tau + f_1(x,t). \qquad (5)$$

Для нахождения неизвестной функции $\mu(t)$ произведем следующую процедуру: возьмём производную порядка $(1+\beta)$ по переменной x в обеих частях соотношения (5) и положим затем $x = t$, тогда с учётом обозначения (4) получим:

$$\mu(t) = -\lambda\int_0^t K_{1+\beta}(t,\tau)\mu(\tau)d\tau = f_2(t). \qquad (6)$$

Ядро интегрального уравнения (6) имеет вид:

$$K_{1+\beta}(t,\tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^x \frac{erf\left(\frac{\xi}{2\sqrt{t-\tau}}\right)d\xi}{(x-\xi)^\beta}\Bigg|_{x=t}, \qquad (7)$$

$$f_2(t) = \left[{}_0D_x^{1+\beta}\int_0^t\int_0^\infty G(x,\xi,t-\tau)\cdot f(\xi,\tau)d\xi d\tau\right]\Bigg|_{x=t}$$

Найдем явный вид ядра, для этого вычислим:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^x erf\left(\frac{\xi}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\cdot\frac{d\xi}{(x-\xi)^\beta} = \left\|\begin{matrix} x-\xi=\eta \\ \xi = x-\eta\end{matrix}\right\| = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^x erf\left(\frac{x-\eta}{2\sqrt{t-\tau}}\right)\cdot\frac{d\eta}{\eta^\beta} =$$

$$= \left\|\frac{\partial}{\partial x}erf\left(\frac{x-\eta}{2\sqrt{t-\tau}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x-\eta}{2\sqrt{t-\tau}}} e^{-z^2}dz\right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4(t-\tau)}}\right\| =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{t-\tau}}\int_0^x e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4(t-\tau)}}\frac{d\eta}{\eta^\beta}\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\cdot\frac{1}{x^\beta} - \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\frac{2}{4(t-\tau)}\int_0^x \frac{x-\eta}{\eta^\beta}\cdot e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4(t-\tau)}}d\eta =$$

$$=\left\|\begin{matrix} x-\eta=\xi \\ \eta=x-\xi \end{matrix}\right\|=\frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)\cdot x^{\beta}}}-\frac{1}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\int_0^x \xi\cdot(x-\xi)^{-\beta}\cdot e^{-\frac{\xi^2}{4(t-\tau)}}d\xi=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)\cdot x^{\beta}}}-\frac{\mathrm{B}(1-\beta,2)}{2\sqrt{\pi}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\cdot x^{2-\beta}\cdot {}_2F_2\left(1,\frac{3}{2};\frac{3-\beta}{2},\frac{4-\beta}{2};-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right).$$

Здесь ${}_2F_2(a_1,a_2;b_1,b_2;z)-$ гипергеометрическая функция, представимая в виде обобщенного гипергеометрического ряда:

$${}_2F_2(a_1,a_2;b_1,b_2;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_1)_k\cdot(a_2)_k}{(b_1)_k\cdot(b_2)_k}\cdot\frac{z^k}{k!};$$

где $(a)_k=a(a+1)\ldots(a+k-1)=\dfrac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}$ - символ Похгаммера,

$$\mathrm{B}(1-\beta,2)=\frac{\Gamma(1-\beta)\cdot\Gamma(2)}{\Gamma(3-\beta)}=\frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(3-\beta)}.$$

Значит окончательно, имеем:

$$K_{1+\beta}(t,\tau)=-\frac{1}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(1-\beta)}\cdot\frac{1}{t^{\beta}\sqrt{t-\tau}}+$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(3-\beta)}\cdot\frac{t^{2-\beta}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\cdot{}_2F_2\left(1,\frac{3}{2};\frac{3-\beta}{2},\frac{4-\beta}{2};-\frac{t^2}{4(t-\tau)}\right).$$

Определим порядок особенности ядра интегрального уравнения (6) – $K_{1+\beta}(t,\tau)$ (при $\tau\to t$ и $t\to 0$). Очевидно, что если $\lim\limits_{t\to 0}\int_0^t K_{1+\beta}(t,\tau)d\tau=0$, то данное ядро имеет слабую особенность, в противном случае интегральное уравнение (5) будет особым интегральным уравнением Вольтерра, которое может иметь неединственное решение. Воспользуемся следующим представлением ядра:

$$\Gamma(1-\beta)K_{1+\beta}(t,\tau)=\frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\cdot\frac{1}{t^{\beta}}-\frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}\frac{2}{4(t-\tau)}\int_0^x\frac{t-\eta}{\eta^{\beta}}\cdot e^{-\frac{(t-\eta)^2}{4(t-\tau)}}d\eta=k_1(t,\tau)-k_2(t,\tau).$$

Очевидно, что $\int_0^t k_1(t,\tau)d\tau=\int_0^t\dfrac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}\cdot t^{\beta}}d\tau=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}t^{1/2-\beta}.$

$$\int_0^t k_2(t,\tau)d\tau=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x\frac{d\eta}{\eta^{\beta}}\int_{\frac{t-\eta}{2\sqrt{t}}}^{\infty}e^{-z^2}dz=\int_0^x\frac{1}{\eta^{\beta}}erfc\left(\frac{t-\eta}{2\sqrt{t}}\right)d\eta$$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\int_0^x\frac{x-\eta}{\eta^{\beta}}e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4(t-\tau)}}d\eta=\frac{4}{2\sqrt{\pi}}\int_0^x\frac{1}{\eta^{\beta}}d\eta\int_0^t\frac{x-\eta}{4(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4(t-\tau)}}d\tau=$$

$$=\int_0^x(t-\xi)^{-\beta}\cdot erfc\left(\frac{\xi}{2\sqrt{t}}\right)d\xi=$$

$$= -\frac{t^{3/2-\beta}}{\sqrt{\pi}} \cdot \mathrm{B}(2,1-\beta) {}_3F_3\left(1,\frac{3}{2},\frac{1}{2};\frac{3-\beta}{2},\frac{2-\beta}{2}+1,\frac{3}{2};-\frac{t}{4}\right) + t^{1-\beta}B(1,1-\beta). \qquad (8)$$

Здесь

$${}_3F_3(a_1,a_2,a_3;b_1,b_2,b_3;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdot (a_2)_k \cdot (a_3)_k}{(b_1)_k \cdot (b_2)_k \cdot (b_3)_k} \cdot \frac{z^k}{k!}.$$

Таким образом, имеем ($\frac{1}{2} \le \beta < 1$):

$$\lim_{t\to 0} \int_0^t K_{1+\beta}(t,\tau)d\tau = \begin{cases} \frac{2}{\pi}, \text{ если } \beta = \frac{1}{2} \\ \infty, \text{ если } \frac{1}{2} < \beta < 1. \end{cases} \qquad (9)$$

Раньше мы показали, что если дифференциальный порядок нагруженного слагаемого есть производная целого порядка на многообразии $x = t$, то единственность решения соответствующей задачи нарушалась, начиная со второго порядка (наличие сплошного спектра, количество собственных функций растет с возрастанием $|\lambda|$) [3], [7] – [10]. Теперь из соотношений (9) выясняется, что «нарушения», по всей видимости, начинаются «раньше» ($\beta = 1/2$), то есть когда нагруженное слагаемое есть производная порядка 3/2.

Рассмотрим случай $\beta = 1/2$. В этом случае интегральное уравнение (5) будет особым интегральным уравнением вида:

$$\mu(t) - \lambda \int_0^t K_{3/2}(t,\tau)\mu(\tau)d\tau = f_2(t), \qquad (10)$$

где

$$K_{3/2}(t,\tau) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{t(t-\tau)}} + \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{t^{3/2}}{(t-\tau)^{3/2}} \cdot {}_2F_2\left(1,\frac{3}{2};\frac{5}{4},\frac{7}{4};-\frac{t^2}{4(t-\tau)}\right).$$

Норма интегрального оператора, определяемого ядром $K_{3/2}(t,\tau)$ и действующего в пространстве суммируемых функций равна $2/\pi \ne 0$. Поэтому, интегральное уравнение (10) не разрешимо методом последовательных приближений и покажем, что соответствующее однородное уравнение при некоторых значениях параметра λ будет иметь ненулевые решения.

Характеристическим уравнением для полного интегрального уравнения (10) будет

$$\mu(t) - \frac{\lambda}{\pi} \int_0^t k_h(t,\tau)\,\mu(\tau)d\tau = g(t), \qquad (11)$$

где

$$k_h(t,\tau) = \frac{1}{\sqrt{t(t-\tau)}}.$$

Данное интегральное уравнение возникает, например, при решении различных краевых задач для вырождающихся дифференциальных уравнений, когда часть границы области задания уравнения освобождена от граничных условий [11]. В работе [10] исследован вопрос о спектре и разрешимости уравнения (11) при условиях $\lambda \in C$ и $t \in R_+ \equiv (0,+\infty)$. Для соответствующего однородного уравнения

$$\mu(t) - \frac{\lambda}{\pi} \int_0^t k_h(t,\tau)\,\mu(\tau) = 0 \qquad (12)$$

справедлива

Теорема 1. [10]. *Для* $\forall\lambda$, *при* $\mathrm{Re}\,\lambda \ge 0$, *однородное интегральное уравнение (12) (наряду с тривиальным) имеет нетривиальное решение вида*

$$\mu(t) = C \cdot t^{\gamma^*},$$

при этом $\gamma^*(\lambda)$ *определяется из трансцендентного уравнения*

$$A(\gamma) \equiv 1 - \frac{\lambda}{\pi} k(\gamma)$$

где $\mathrm{Re}\,\gamma > -1,\ k(\gamma) = B\left(\frac{1}{2}, \gamma + 1\right)$, $B(p,q)$- *бета-функция. Если же* $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$, *то однородное уравнение (12) имеет только тривиальное решение.*

Теперь найдем частное решение неоднородного интегрального уравнения (11). Введем обозначение

$$l(\gamma) = -\frac{k(\gamma)}{k'(\gamma)} \qquad (13)$$

Это величина, обратная логарифмической производной функции $k(\gamma)$. Если $\mathrm{Re}\,\lambda \ge 0$, то частное решение уравнения (11) можно записать в виде

$$\mu(t) = g(t) + l(\gamma^*) \int_0^t r(t,\tau) g(\tau) d\tau,$$

где

$$r(t,\tau) = \frac{\tau^{\gamma^*}}{t^{\gamma^*+1}}.$$

Если же $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ то решение уравнения (12) будет иметь вид

$$\mu(t) = g(t) + \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} l(\gamma_k^0) \frac{\tau^{\gamma_k^0}}{t^{\gamma_k^0+1}} g(\tau) d\tau,$$

где $\gamma_k^0 = \gamma_{1k}^0 + i\gamma_{2k}^0$, $k = 1,2,...$ нули функции $A(\gamma) = 1 - \frac{\lambda}{\pi} k(\gamma)$, расположенные в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\gamma < -1$.

Значит справедлива

Теорема 2. [10]. *Для любой функции* $g(t)$ $(e^{-t} \cdot g(t) \in L_1(0,+\infty))$, *неоднородное интегральное уравнение (12) имеет решение* $\mu(t)$ $(e^{-t} \cdot \mu(t) \in L_1(0,+\infty))$

$$\mu(t) = g(t) + \ (\gamma^*) + \int_0^t \frac{\tau^{\gamma^*}}{t^{\gamma^*+1}} g(\tau) d\tau + ct^{\gamma^*},$$

$$\text{если } \mathrm{Re}\,\lambda \ge 0,\ \mu(t) = g(t) + \int_0^t \sum_{k=1}^{\infty} l(\gamma_k^0) \frac{\tau^{\gamma_k^0}}{t^{\gamma_k^0+1}} g(\tau) d\tau, \text{ если } \mathrm{Re}\,\lambda < 0.$$

Теперь уравнение (10) перепишем в виде

$$\mu(t) - \frac{\lambda}{\pi} \int_0^t k_h(t,\tau) \mu(\tau) d\tau = f_2(t) - \lambda \int_0^t k_{3/2}(t,\tau) \mu(\tau) d\tau$$

где

$$k_{3/2}(t,\tau) = \frac{2}{3\pi} \left(\frac{t}{t-\tau} \right)^{3/2} {}_2F_2\left(1, \frac{3}{2}; \frac{5}{4}, \frac{7}{4}; -\frac{t^2}{4(t-\tau)}\right)$$

Теорема 3. *Для интегрального уравнения (10) в пространстве (3)* $\dim\{\ker(K_{3/2})\} = 0$, *если* $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$, *если* $\mathrm{Re}\,\lambda \ge 0$, *то* $\dim\{\ker(K_{3/2})\} = 1.$

Таким образом, для задачи (1)- (2) будет справедлива

Теорема 4. *Краевая задача (1)-(2) при* $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$ *является нетеровой с индексом 1. Если же* $\operatorname{Re}\lambda < 0$*, то задача (1)-(2) имеет единственное решение в (3).*

Перейдем теперь к случаю $\frac{1}{2} < \beta < 1$. Характеристическим интегральным уравнением, соответствующим уравнению (6) будет следующее уравнение

$$\mu(t) - \lambda \int_0^t K_h(t,\tau)\mu(\tau)d\tau = g(t),\ t > 0 \qquad (14)$$

где

$$K_h(t,\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(1-\beta)}\cdot\frac{1}{t^{\beta}\sqrt{t-\tau}} \qquad (15)$$

Замечание 1. *Оставшаяся часть ядра* $K_{1+\beta}(t,\tau)$*, которую обозначим*

$$K_{\kappa}(t,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(3-\beta)}\cdot\frac{t^{2-\beta}}{(t-\tau)^{3/2}}\cdot {}_2F_2(1,\frac{3}{2};\frac{3-\beta}{2},\frac{4-\beta}{2};-\frac{t^2}{4(t-\tau)})$$

будет иметь слабую особенность при $0 < \tau < t < \infty$.

Используя оператор дробного интегрирования уравнение (14) можно записать в виде

$$\mu(t) = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(1-\beta)}\cdot\frac{1}{t^{\beta}}\cdot {}_0D_t^{-\frac{1}{2}}\mu(t) \qquad (16)$$

или же

$${}_0D_t^{-\frac{1}{2}}\mu(t) = \frac{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(1-\beta)}{\lambda}\cdot t^{\beta}\cdot\mu(t) \qquad (17)$$

Если к обеим частям уравнения (16) применим оператор ${}_0D_t^{-\frac{1}{2}}$ и с учетом соотношения (17) получим

$$\frac{\tilde{A}^2(1-\beta)}{\lambda^2}\cdot t^{\beta}\cdot\mu(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} D_t^{-\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{t^{\beta}}\ {}_0D_t^{-\frac{1}{2}}\mu(t)\right\}. \qquad (18)$$

Преобразуем правую часть равенства (18)

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\ {}_0D_t^{-\frac{1}{2}}\mu(t) = \left\{\frac{1}{t^{\beta}}\ {}_0D_t^{-\frac{1}{2}}\mu(t)\right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{d\tau}{\tau^{\beta}\sqrt{t-\tau}}\int_0^{\tau}\frac{\mu(\xi)}{\sqrt{\tau-\xi}}d\xi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^t \mu(\xi)d\xi \int_{\xi}^t \frac{d\tau}{\tau^{\beta}\sqrt{(t-\tau)(\tau-\xi)}} = \left\|\frac{\tau-\xi}{t-\tau} = z\right\| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^t \mu(\xi)d\xi \int_0^{\infty} t^{-\beta}\cdot\sqrt{z}(1+z)^{-(1-\beta)}\cdot\left(z+\frac{\xi}{t}\right)^{-\beta}dz =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} t^{-\beta}\left(\frac{\xi}{t}\right)^{1/2-\beta}\cdot B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\cdot {}_2F_1\left(1-\beta,\frac{1}{2};1;1-\frac{\xi}{t}\right)\mu(\xi)d\xi =$$

$$= \int_0^t \frac{\xi^{1/2-\beta}}{\sqrt{t}}\cdot {}_2F_1\left(1-\beta,\frac{1}{2};1;1-\frac{\xi}{t}\right)\mu(\xi)d\xi.$$

Значит, окончательно, равенство (18) примет вид

$$\frac{\tilde{A}^2(1-\beta)}{\lambda^2}\cdot t^{\beta+1/2}\cdot\mu(t) = \int_0^t {}_2F_1\left(1-\beta,\frac{1}{2};1;1-\frac{\tau}{t}\right)\frac{\mu(\tau)}{\tau^{\beta-1/2}}d\tau. \qquad (19)$$

Функция

$$ {}_2F_1\left(1-\beta,\frac{1}{2};1;1-\frac{\tau}{t}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-\beta)_k\left(\frac{1}{2}\right)_k}{k!}\left(1-\frac{\tau}{t}\right)^k $$

- гипергеометрический ряд, который является аналитической функцией и абсолютно сходится для всех $0\le\tau\le t$.

Для $\forall\tau\in[0,t]$, при $\frac{1}{2}<\beta<1$ данная гипергеометрическая функция монотонно убывает и справедливы оценки [12]

$$ 1\le {}_2F_1\left(1-\beta,\frac{1}{2};1;1-\frac{\tau}{t}\right)\le\frac{\Gamma\left(\beta-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\beta)}. $$

К интегралу в равенстве (19) применим обобщенную теорему о среднем, тогда

$$ \frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\lambda^2}\cdot t^{\beta+1/2}\cdot\mu(t)={}_2F_1\left(1-\beta,\frac{1}{2};1;1-\frac{\tau}{t}\right)\Bigg|_{\tau=\theta\cdot t}\int_0^t\frac{\mu(\tau)}{\tau^{\beta-1/2}}d\tau, $$

или же имеем

$$ \frac{\Gamma^2(1-\beta)}{b(\theta,\beta)\lambda^2}\cdot t^{\beta+1/2}\cdot\mu(t)=\int_0^t\frac{\mu(\tau)}{\tau^{\beta-1/2}}d\tau \qquad (20) $$

где $b(\theta,\beta)={}_2F_1\left(1-\beta,\frac{1}{2};1;1-\theta\right),\ 0\le\theta\le1.$

$$ b(\theta,\beta)={}_2F_1\left(1-\beta,\frac{1}{2};1;1-\theta\right),\ \ 0\le\theta\le1,\ \theta=const. $$

Дифференцируя обе части равенства (20) получим следующее дифференциальное уравнение

$$ \mu'(t)=\left(\frac{\lambda^2\cdot b(\theta,\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}\cdot\frac{1}{t^{2\beta}}-\frac{\beta+1/2}{t}\right)\cdot\mu(t). $$

решением которого будет

$$ \mu_{0.0}(t)=C\cdot\frac{1}{t^{\beta+1/2}}\cdot\exp\left\{-\frac{\lambda^2\cdot b(\theta,\beta)}{\tilde{A}^2(1-\beta)(2\beta-1)}\cdot\frac{1}{t^{2\beta-1}}\right\}. \qquad (21) $$

Найдем частное решение неоднородного уравнения (14), которое представим в следующем виде

$$ \mu(t)=\frac{\lambda}{\tilde{A}(1-\beta)}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}t^{\beta}}\cdot{}_0D_t^{-\frac{1}{2}}[\mu(t)]+g(t) \qquad (22) $$

или

$$ {}_0D_t^{-\frac{1}{2}}[\mu(t)]=\frac{\tilde{A}(1-\beta)}{\lambda}\cdot t^{\beta}(\mu(t)-g(t)). $$

Применим оператор ${}_0D_t^{-\frac{1}{2}}$ к соотношению (22), и с учетом последнего равенства получим

$$ \frac{\tilde{A}(1-\beta)}{\lambda}\cdot t^{\beta}(\mu(t)-g(t))-{}_0D_t^{-\frac{1}{2}}[g(t)]=\frac{\lambda}{\tilde{A}(1-\beta)}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\ {}_0D_t^{-\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{t^{\beta}}{}_0D_t^{-\frac{1}{2}}[\mu(t)]\right\}. $$

Повторяя выкладки, проведенные для соответствующего однородного уравнения, будем иметь

$$ \frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\lambda^2}\cdot t^{\beta+1/2}(\mu(t)-g(t))-\frac{\Gamma(1-\beta)}{\lambda}\cdot\sqrt{t}\cdot{}_0D_t^{-\frac{1}{2}}[g(t)]= $$

$$ =b(\theta,\beta)\cdot\int_0^t\frac{\mu(t)}{\tau^{\beta-1/2}}d\tau. $$

Дифференцируя обе части этого равенства по переменной t, сведем его к следующему дифференциальному уравнению относительно искомой функции $\mu(t)$.

$$\mu'(t)-\left[\frac{\lambda^2\cdot b(\theta,\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)}\cdot\frac{1}{t^{2\beta}}-\frac{\beta+\frac{1}{2}}{t}\right]\cdot\mu(t)=\tilde{g}(t) \qquad (23)$$

где

$$\tilde{g}(t)=\frac{1}{t^{\beta+\frac{1}{2}}}\cdot\left[t^{\beta+\frac{1}{2}}\cdot g(t)+\frac{\lambda}{\Gamma(1-\beta)}\cdot\sqrt{t}\ D^{-\frac{1}{2}}[g(t)]\right]_t^{\prime}.$$

Значит частное решение уравнения (23) будет иметь вид

$$\mu_{\text{тр}}(t)=g(t)+\frac{\lambda}{\tilde{A}(1-\beta)}\ t^{-\beta}\cdot{}_0D_t^{-\frac{1}{2}}[g(t)]\ +$$

$$+(2\beta-1)\frac{A_\lambda(\theta,\beta)}{t^{\beta+\frac{1}{2}}}\cdot\exp\left[-\frac{A_\lambda(\theta,\beta)}{t^{2\beta-\frac{1}{2}}}\right]\cdot\int_0^t\tilde{\tilde{g}}(\tau)\cdot\exp\left[\frac{A_\lambda(\theta,\beta)}{t^{2\beta-1}}\right]d\tau,$$

где

$$A_\lambda(\theta,\beta)=\frac{\lambda^2\cdot b(\theta,\beta)}{(2\beta-1)\cdot\Gamma^2(1-\beta)} \qquad (24)$$

$$\tilde{\tilde{g}}(t)=\frac{1}{t^{\beta-\frac{1}{2}}}\cdot g(t)+\frac{\lambda}{\Gamma(1-\beta)}\cdot\frac{1}{t^{2\beta-\frac{1}{2}}}\cdot{}_0D_t^{-\frac{1}{2}}[g(t)] \qquad (25)$$

Таким образом, справедливо следующее

Утверждение. *Если для функции* $g(t)$ *выполнено условие*

$$\exp\left[\frac{A_\lambda(\theta,\beta)}{t^{2\beta-1}}\right]\cdot\tilde{\tilde{g}}(\tau)\in L_1(0,+\infty) \qquad (26)$$

где $\tilde{\tilde{g}}(t)$ *- определяется соотношением (25), то сингулярное интегральное уравнение (14) имеет общее решение вида*

$$\mu(t)=g(t)+\frac{\lambda}{\Gamma(1-\beta)}\ t^{-\beta}\cdot{}_0D_t^{-\frac{1}{2}}[g(t)]\ +$$

$$+(2\beta-1)\frac{A_\lambda(\theta,\beta)}{t^{\beta+\frac{1}{2}}}\cdot\exp\left[-\frac{A_\lambda(\theta,\beta)}{t^{2\beta-\frac{1}{2}}}\right]\cdot\int_0^t\tilde{\tilde{g}}(\tau)\cdot\exp\left[\frac{A_\lambda(\theta,\beta)}{t^{2\beta-1}}\right]d\tau+$$

$$+C\cdot t^{-(\beta+\frac{1}{2})}\cdot\exp\left\{-\frac{A_\lambda(\theta,\beta)}{t^{2\beta-1}}\right\},$$

где функция $\tilde{\tilde{g}}(t)$ *принадлежит классу (26) и определяется из соотношения (25).*

Для полного интегрального уравнения (6), в силу замечания 1 будет справедлива

Теорема 5. *При* $\frac{1}{2}<\beta<1,\quad\forall\lambda\in C$, *для сингулярного интегрального уравнения типа Вольтерра (6) в классе функций*

$$t^{+(\beta+\frac{1}{2})}\cdot\exp\left\{\frac{\lambda^2\cdot b(\theta,\beta)}{(2\beta-1)\Gamma^2(1-\beta)}\right\}\cdot\mu(t)\in M(0,\infty)\ , \qquad (27)$$

где $M(0,\infty)$ *- класс ограниченных на* $(0,+\infty)$ *функций*

$\dim Ker(K_{1+\beta})=1.$

Таким образом, окончательно, для задачи (1)- (2) в случае $\frac{1}{2} < \beta < 1$ справедлива

Теорема 6. *Краевая задача (1)-(2), при* $\frac{1}{2} < \beta < 1, \quad \forall \lambda \in C$ *в классе (3) является нетеревой с индексом равным 1.*

Литература

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 272 с.
2. *Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И.* Нагруженные уравнения – как возмущения дифференциальных уравнений. Алматы: ГЫЛЫМ, 2010. 334 с.
3. *Жанболова А. К., Каршыгина Г. Ж.* О нагруженном уравнении теплопроводности с нагрузкой дробного порядка. // Теоретические и прикладные проблемы математики, механики и информатики: межд. Конф. (Караганда, 12-14 июня), 2014. С. 25-26.
4. *Есбаев А. Н., Жанболова А. К., Петерс С. Н.* О первой краевой задаче для слабо-нагруженного параболического уравнения // Вестник КарГУ, 2012. № 4 (68). С. 31-37.
5. *Аттаев А. Х.* Задача Гурса для локально-нагруженного уравнения со степенным параболическим вырождением // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук, 2008. Т. 10. № 2. С. 14-16.
6. *Дикинов Х. Ж., Керефов А. А., Нахушев А. М.* Об одной краевой задаче для нагруженного уравнения теплопроводности // Дифференц. Уравнения, 1976. Т. 12. № 1. С. 177 – 179.
7. *Akhmanova D. M., Kosmakova M. T., Ramazanov M. I., Tuimebayeva A. E.* On the solutions of the homogeneous mutually conjugated Volterra integral equations // Вестник Карагандинского университета. Сер. Математика, 2013. № 2 (70). С. 153–158.
8. *Ахманова Д. М., Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И.* Об особом интегральном уравнении Вольтерра второго рода со спектральным параметром. // Сибирский математический журнал, 2011. Т. 52. № 1. С. 3-14.
9. *Амангалиева М. М., Ахманова Д. М., Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И.* Краевые задачи для спектрально-нагруженного оператора теплопроводности с приближением линии загрузки в нуль или бесконечность. // Дифференциальные уравнения, 2011. Vol. 47. № 2. С. 231-243.
10. *Jenaliyev M. T., Ramazanov M. I., Tuimebayeva A. E.* On a Singular Volterra Integral Equations of the Third Kind. // World Applied Sciences Journal, 2013. 26 (11). P. 1424-1427.
11. *Нахушев А. М.* Обратные задачи для вырождающихся уравнений и интегральные уравнения Вольтерра третьего рода. // Дифференц. Уравнения, 1974. Т. 10. № 1. С. 100–111.
12. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз., 1963. 982 с.