

**Дифракция симметричной электромагнитной волны  
на отрезке круглого волновода  
Елеусинова Г. М.**

*Елеусинова Гульсайра Мухтаровна / Yeleussinova Gulsaira Mukhtarovna – магистрантка,  
кафедра радиотехника, электроника и телекоммуникации,  
факультет физико-технический,  
Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева, г. Астана, Республика Казахстан*

**Аннотация:** рассматривается внешняя задача дифракции симметричной электромагнитной волн на отрезке круглого волновода методом Винер-Хопф-Фока.

**Ключевые слова:** симметричные волны, метод Винер-Хопф-Фока, круглый волновод.

Изучение структуры электромагнитных полей, возбуждаемых в круглом волноводе, тесно связано с рядом важных практических приложений. Волноводы цилиндрического типа находят широкое применение в антенной и измерительной технике, в радиолокации и радиоастрономии, в линиях дальней и спутниковой связи и во многих других областях. Также исследование таких систем становится все более интенсивным по мере освоения все более коротковолновых диапазонов, особенно сантиметровых, миллиметровых и субмиллиметровых волн [1].

Поставленная задача постоянно привлекает внимание исследователей, прежде всего потому, что круг дифракционных задач на конечных структурах до сих пор не решен строгими методами, это с одной стороны, а с другой, она имеет теоретическую значимость в качестве начального приближения для полуаналитических и численных методов при решении сложных практических задач антенной и измерительной техники в радиолокации и радиоастрономии, в линиях дальней и спутниковой связи и во многих других областях. Следующей особенностью задачи является исследование симметричной электромагнитной волны в открытом резонаторе из отрезка круглого волновода, что бесспорно повышает ее математический уровень сложности.

Целью данного исследования является получение аналитических формул для расчета полей при дифракции симметричной волны на отрезке круглого волновода.

Симметричные электрические  $E_0$  (т.е.  $E_{01}, E_{02}, \dots$ ) и магнитные волны  $H_0$  (т.е.  $H_{01}, H_{02}, \dots$ ) характеризуется скалярными функциями, которые соответственно являются продольной составляющей электрического и магнитного векторов Герца [2, 3]:

$$\Pi_z^e = \Pi(r, z)e^{ihz}, \quad \Pi_z^m = \tilde{\Pi}(r, z)e^{ihz}.$$

Поля магнитных  $H_0$  волн выражаются с помощью функции  $\tilde{\Pi}$  следующим образом:

$$E_\varphi = ik\tilde{\Pi}, \quad H_r = -\frac{\partial}{\partial z}\tilde{\Pi}, \quad H_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tilde{\Pi}), \quad (1)$$

а для электрических и магнитных полей  $E_0$  волн имеем:

$$E_z = -\frac{1}{ik}\left(\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + k^2 \Pi\right), \quad E_r = -\frac{1}{ik}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r \partial z}, \quad H_\varphi = -\frac{\partial}{\partial z}\tilde{\Pi}. \quad (2)$$

Электромагнитные поля  $E_{0n}$  - волн определяются из вышеприведенных формул через электрическую функцию Герца  $\Pi$ , а электромагнитные поля волн  $H_{0n}$  – из магнитной функции Герца  $\tilde{\Pi}$ .

Постановка задачи

Пусть на конец отрезка трубы с бесконечно тонкой стенкой радиуса  $a$  набегают справа волна: симметричная электрическая с амплитудой  $A$  и волновым числом  $-h$  или симметричная магнитная с амплитудой  $B$  и волновым числом  $\tilde{h}$  (рис. 1).

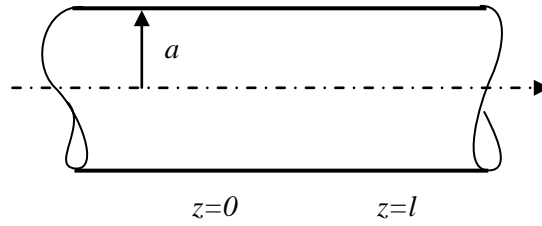


Рис. 1.

При этом решение задачи должно удовлетворять следующим граничным условиям:

$$E_z = E_\varphi = 0 \text{ при } r = a, 0 \leq z \leq l, \quad (3)$$

$$J_\varphi = H_z(a-0, \varphi, z) - H_z(a+0, \varphi, z) = 0 \text{ при } z < 0, z > l, \quad (4)$$

$$J_z = H_\varphi(a-0, \varphi, z) - H_\varphi(a+0, \varphi, z) = 0 \text{ при } z \leq 0, z \geq l, \quad (5)$$

где  $J_\varphi, J_z$  – азимутальная и продольная составляющие поверхностной плотности тока.

Функции Герца  $\Pi$  и  $\tilde{\Pi}$  должны быть решениями уравнения:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \Pi \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \Pi + \left( k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) \Pi = 0. \quad (6)$$

Решение задачи

Функции Герца, согласно уравнению (6), мы ищем в виде:

$$\Pi = -i \frac{\pi a}{2k} W \int_C e^{i w z} L(r, w) F(r, w) dw, \quad (7)$$

$$\tilde{\Pi} = \frac{\pi a}{2} \int_C e^{i w z} L(r, w) dw, \quad (8)$$

где  $v = \sqrt{k^2 - w^2}$ ,

$$L(r, w) = \pi w^2 a J_m(v a) H_m(v a), \quad (9)$$

$$L(r, w) = \pi a J'_m(v a) H'_m(v a), \quad (10)$$

$J_m(x)$  – функция Бесселя,  $H_m(x)$  – функция Ханкеля,  $C$  – контур интегрирования в плоскости комплексного переменного  $w$ , проходящий в основном по вещественной оси и огибающий узкой петлей точки  $h$  и  $\tilde{h}$  снизу,  $F$  и  $F$  – искомые функции.

Краевая задача для  $H_0$  и  $E_0$  волн сводится к следующим функциональным интегральным уравнениям:

$$\int_C e^{i w z} L F(w) dw = 0, \text{ при } 0 < z < l, \quad (11)$$

$$\int_C e^{i w z} F(w) dw = 0, \text{ при } z < 0, z > l, \quad (12)$$

где введены обозначения  $L \equiv L(a, w)$ ,  $L \equiv L(a', w)$ .

Искомые функции  $F$  и  $F$  удовлетворяют системе функциональных уравнений, если выполняются следующие требования:

1. Соотношение (12) будет выполнено, если функция  $F(w)$  аналитична в нижней полуплоскости (НП) (при  $\text{Im } w < 0$ ) всюду, за исключением точки  $w = -h$  ( $w = -\tilde{h}$ ), где она имеет простой полюс с вычетом  $A$  ( $B$ ), причем при  $|w| \rightarrow \infty$  в этой плоскости функция равномерно стремится к нулю как  $w^{-1/2}$ .

2. Соотношение (11) будет выполняться, если  $LF(w)$  аналитична в верхней полуплоскости (ВП) ( $\text{Im } w > 0$ ) и в ВП ведет себя на бесконечности как  $w^{-1/2}$ .

Решение системы функциональных уравнений, удовлетворяющее вышеприведенным требованиям, строится по методу Винера-Хопфа-Фока следующим образом [4, 5]:

$$F(w) = \frac{1}{(k-w)L_-} \left( \frac{E}{w+h} \right), \quad (13)$$

$$F(w) = \frac{1}{L_-} \left( \frac{M}{w+\tilde{h}} \right), \quad (14)$$

где  $E$ ,  $M$  – постоянные,  $L_-$ ,  $L_-$  – факторизованные функции, аналитичные в нижней полуплоскости ( $\text{Im } w < 0$ ). Отметим, для факторизованных функций справедливы соотношения:

$$L(a, w) = L(a, w)_- \cdot L(a, w)_+, \quad L(a, w)_+ = L(a, -w)_-.$$

Интеграл по узкой петле контура  $C$  вокруг полюса при  $w = -\tilde{h}$  в (11) соответствует набегающей магнитной волне тока, откуда получим связь постоянной  $M$ , с амплитудой  $B$ :

$$M = \frac{B}{2\pi i} L(a, \tilde{h})_+, \quad (15)$$

Также с помощью вычета в точке  $w = -h$  из уравнения (12) определим константу:

$$E = \frac{A}{2\pi i} (k+h)L(a, h)_+. \quad (16)$$

Таким образом, краевая задача сведена к решению линейных алгебраических уравнений.

В данной статье основным результатом является аналитические формулы для расчета полей при дифракции симметричных электромагнитных волн на отрезке круглого волновода.

### Литература

1. Кунденко Н. П., Черенков А. Д. Исследования открытой резонансной системы с отрезком круглого волновода. Восточно-Европейский журнал передовых технологий. № 5 (57)/ том 3/2012.
2. Dozyslav B. Kuryliak, Kazuya Kobayashi, Shoichi Koshikawa. Wiener-Hopf Analysis of the Diffraction by a Circular Waveguide Cavity. Journal of the Institute of Science and Engineering. Chuo University, 2004.
3. Вайнштейн Л. А. Теория дифракции и метод факторизации – М.: Советское радио, 1966.
4. Daniele V. G., Lombardi G. Wiener-Hopf solution for impenetrable wedges at skew incidence. IEEE Trans. Antennas and Propagation, Vol.54, No.9, 2472-2485, 2006.
5. Sautbekov S. S., Alkina G., Sautbekova M. Wiener-hopf method problems of diffraction of asymmetric waves by circular cylinder, Progress in Electromagnetics Research Symposium, 2013.