Об определителе Фредгольма, ассоциированном семейством обобщенных моделей Фридрихса

Бахранова У. И.[1], Хайдарова Ф. Ш.[2]

[1]Бахранова Умида Исломовна / Bakhranova Umida Islomovna – преподаватель математики, Школа-интернат № 23;
[2]Хайдарова Ферангис Шавкатовна / Khaydarova Ferangis Shavkatovna – преподаватель математики, Школа № 28, Гиждуванский район, г. Бухара, Республика Узбекистан

Аннотация: *в настоящей работе рассматривается семейство обобщенной модели Фридрихса. Изучены связь между определителем Фредгольма и собственными значениями этого оператора. Доказана монотонность определителя Фредгольма.*
Ключевые слова: *обобщенная модель Фридрихса, существенный и дискретныы спектры, пространство Фока, принцип Бирмана-Швингера.*

В рамках проблемы нескольких тел на непрерывном пространстве и на решетке исследовано большое число задач о существовании собственных значений для систем квазичастиц, число которых сохраняется [1]. Однако имеются в определенном смысле более актуальные и интересные задачи, возникающие в теории твердого тела [2], статистической физике [3], теории квантового поля [4] и теории химических реакций [5], в которых число квазичастиц не сохраняется. В данной работе рассматриваются семейства обобщенных моделей Фридрихса, ассоциированные с системой не более чем двух частиц. Пусть $T^3 \equiv (-\pi;\pi]^3$ - трехмерный куб с соответствующим отождествлением противоположных граней, $H_0 = C$ - одномерное комплексное пространство, $H_1 = L_2(T^3)$- гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на T^3. Гильбертово пространство $H = H_1 \oplus H_2$ называется двухчастичным обрезанным подпространством Фоковского пространства.

Рассмотрим семейство ограниченных и самосопряженных операторов $h_\mu(p)$, $p \in T^3$, $\mu > 0$ (семейство обобщенных моделей Фридрихса), действующих в гильбертовом пространстве H и задающихся формулой

$$h_\mu(p)\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\, f_0 + \sqrt{\mu}\int\limits_{T^3} v(s)\, f_1(s)ds \\ \sqrt{\mu}v(q)\, f_0 + u(p,q)\, f_1(q) \end{pmatrix},\ f_i \in H_i, i = 0{,}1,$$

где a и μ - вещественные положительные числа, $v(\cdot)$ - вещественно-непрерывная (отличная от нуля) функция на T^3, а функция $u(\cdot,\cdot)$ определяется равенством:

$$u(p,q) = \varepsilon(p) + \varepsilon(p+q) + \varepsilon(q),\ \varepsilon(p) = \sum_{i=1}^{3}(1-\cos p_i),\ p = (p_1, p_2, p_3) \in T^3.$$

Оператор возмущения $h_\mu(p) - h_0(p)$, $\mu > 0$ оператора $h_0(p)$, $p \in T^3$ является самосопряженным оператором ранга 2. Следовательно, из известной теоремы Г. Вейля о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга вытекает, что $\sigma_{ess}(h(p)) = \sigma_{ess}(h_0(p)) = [m(p), M(p)]$, где числа $m(p)$ и $M(p)$ определяются равенствами: $m(p) = \varepsilon(p) + \sum_{i=1}^{3}\left(1-\cos\frac{p_i}{2}\right)$, $M(p) = \varepsilon(p) + \sum_{i=1}^{3}\left(1+\cos\frac{p_i}{2}\right)$. Видно, что существенный спектр оператора $h_\mu(p)$ не зависит от μ и $\sigma_{ess}(h_\mu(0)) = [0{,}12]$.

Положим:

$$I(p;z) = \int\limits_{T^3}\frac{v^2(s)ds}{u(p,s)-z},\ p \in T^3, z \in C \setminus [m(p); M(p)].$$

При каждом фиксированном $\mu > 0$ и $p \in T^3$ определим регулярную в $C \setminus \sigma_{ess}(h_\mu(p))$ функцию $\Delta_\mu(p;z) = a - z - \mu I(p;z)$, $z \in C \setminus \sigma_{ess}(h_\mu(p))$ (определитель Фредгольма, ассоциированный с оператором $h_\mu(p)$). Функция $u(p,.)$, $p \in T^3$ имеет единственный невырожденный минимум в точке $q = {}^{p}\!/_{2}$ и, следовательно, в силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла следует, что существует конечный предел $\Delta_\mu(p;m(p)) \lim\limits_{z\to m(p)-0} \Delta_\mu(p;z), p\in(-\pi;\pi)^3$. Заметим, что

$$\Delta_\mu(\pi;z)a - z - \mu(12-z)^{-1}\int_{T^3} v^2(s)ds. \text{ и } \lim_{z\to-\infty}\Delta_\mu(p;z) = +\infty.$$

Следующая теорема установит связь между собственными значениями оператора $h_\mu(p)$, $p \in T^3$ и нулями $\Delta_\mu(p;\cdot)$, $p \in T^3$.

Теорема 1. *Для любых* $\mu > 0$ *и* $p \in T^3$ *следующие утверждения эквивалентны:*

1) Оператор $h_\mu(p)$ *имеет собственное значение* z, *лежащее ниже* $m(p)$*;*

2) $\Delta_\mu(p;z) = 0, z\in(-\infty;m(p))$;

3) Имеет место неравенство $\Delta_\mu(p;z') < \Delta_\mu(p;z) = 0$ *для некоторого* $z' \le m(p)$.

Доказательство. Из принципа Бирмана-Швингера следует, что для любых $\mu > 0$ и $p \in T^3$ число $z \in (-\infty;m(p))$ является собственным значением оператора $h_\mu(p)$ тогда и только тогда, когда число $\lambda = 1$ является собственным значением оператора

$$(G_\mu(p;z)\psi)(q) = \frac{v(q)}{a}\int_{T^3}\frac{v(s)ds}{u(p,s)-z}.$$

В силу теоремы Фредгольма число $\lambda = 1$ является собственным значением оператора $G_\mu(p;z)$ тогда и только тогда, когда $\Delta_\mu(p;z) = 0$. Эквивалентность утвержденний 1) и 2) доказаны.

Для доказательства эквивалентности утверждений 2) и 3), предположим, что $\Delta_\mu(p;z_0) = 0$ для некоторого $z_0 \in (-\infty;m(p))$; Так как функция $\Delta_\mu(p;\cdot)$ монотонно убывает на полуоси $(-\infty;m(p))$ имеем, что $\Delta_\mu(p;z') < \Delta_\mu(p;z_0) = 0$ для некоторого $z_0 < z' < m(p)$.

Теперь мы предположим, что верно $\Delta_\mu(p;z') < 0$ для некоторого $z' < m(p)$. Для любого $p \in T^3$ функция $\Delta_\mu(p;\cdot)$ непрерывна на $(-\infty;m(p))$ и $\lim\limits_{z\to-\infty}\Delta_\mu(p;z) = +\infty$, следовательно, существует точка $z_0 \in (-\infty;z')$ такая, что $\Delta_\mu(p;z_0) = 0$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *При каждом фиксированным* $p \in T^3$ *и* $\mu > 0$ *функция* $\Delta_\mu(p;\cdot)$ *монотонна убывает на интервалах* $(-\infty, m(p))$ *и* $(M(p),\infty)$.

Доказательство. Так как при каждом фиксированным $p \in T^3$ и $\mu > 0$ функция $\Delta_\mu(p;\cdot)$ дифференцируема на интервалах $(-\infty, m(p))$ и $(M(p),\infty)$ имеем, что $\frac{d}{dz}\Delta_\mu(p,z) < 0$ при всех $z \in (-\infty, m(p)) \cup (M(p),\infty)$. Это означает, что функция $\Delta_\mu(p;\cdot)$ монотонно убывает на интервалах $(-\infty, m(p))$ и $(M(p),\infty)$. Теорема 2 доказана.

Литература

1. *Изюмов Ю. А., Медведев М. В*. Магнитный полярон в ферромагнитном кристалле. ЖЭТФ, 1970 вып. 2. № 8. стр. 553-560.
2. *Mogilner A. T.* Hamiltonians of solid state physics at few particle discrete Schroedinerger operators: problems and results. Advances in Sov. Math. 5 (1991). Pp. 139-194.
3. **Malishev V. A., Minlos R. A**. Linear infinite-particle operators. Translations of Math. Monagraphs. Amer. Math. Soc. Trasl. 177 (1996). № 2. Pp. 159-193.

4. *Friedrichs K. O.* On the perturbation of continuous spectra. Comm. Appl. Math. 1 (1948). Pp. 361-406.
5. *Bach V., Froehlich J., Sigal I. M.* Mathematical theory of non-relavistic matter and radiation. Lett. Math. Phys. 34 (1995). Pp. 183-201.