

О ТРЕХ ВИДАХ КАТУШКООБРАЗНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Кайдасов Ж.

*Кайдасов Жеткербай - кандидат физико-математических наук, профессор,
кафедра математики,*

Актюбинский региональный государственный университет им.К. Жубанова, г. Актобе, Республика Казахстан

Аннотация: в статье рассматриваются регулярные поверхности отрицательной гауссовой кривизны в трехмерном евклидовом пространстве E^3 , которые по внешнему виду очень похожи на псевдосферические. Преобразованием параметрических уравнений катушки Миндинга определены аналитические описания трех типов таких катушкообразных поверхностей и установлены их геометрические формы с использованием компьютерной графики. Вычислением полной кривизны для каждого типа установлено, что они мало отличаются от псевдосферических.

Ключевые слова: гауссова кривизна, псевдосферические поверхности, катушка Миндинга.

УДК 514.7

Изучение поверхностей постоянной отрицательной кривизны в E^3 (псевдосферических) исторически оказалось тесно связанным с проблемой интерпретации геометрии Лобачевского. Еще в 1868 году Э. Бельтрами показал, что на поверхностях постоянной отрицательной кривизны выполняется локально планиметрия Лобачевского [1]. Укажем поверхности вращения постоянной отрицательной кривизны, найденные Ф. Миндингом и Э.Бельтрами. Поверхности вращения с указанными на рис. 1 меридианами называют соответственно волчком Миндинга, катушкой Миндинга и псевдосферой (или поверхностью Бельтрами) [2].

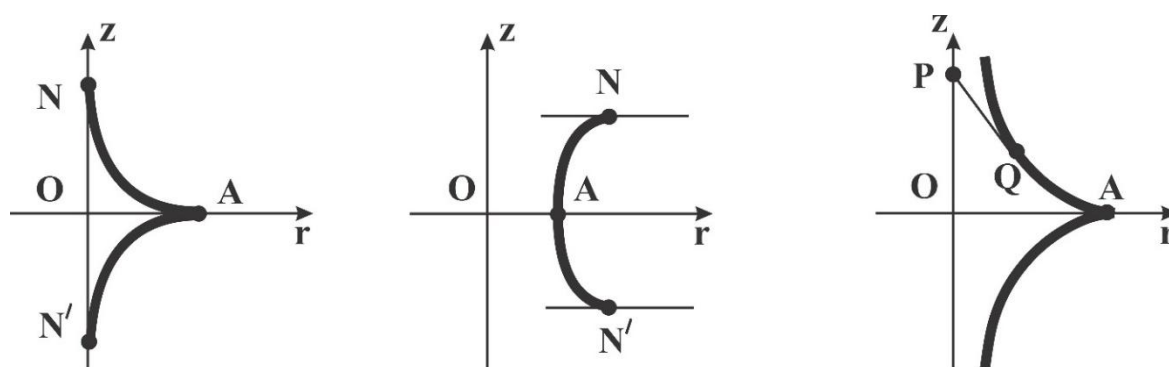


Рис. 1. Три типа меридиан

Эти поверхности соответственно изображены на рис. 2. В E^3 нет других поверхностей вращения постоянной отрицательной кривизны.

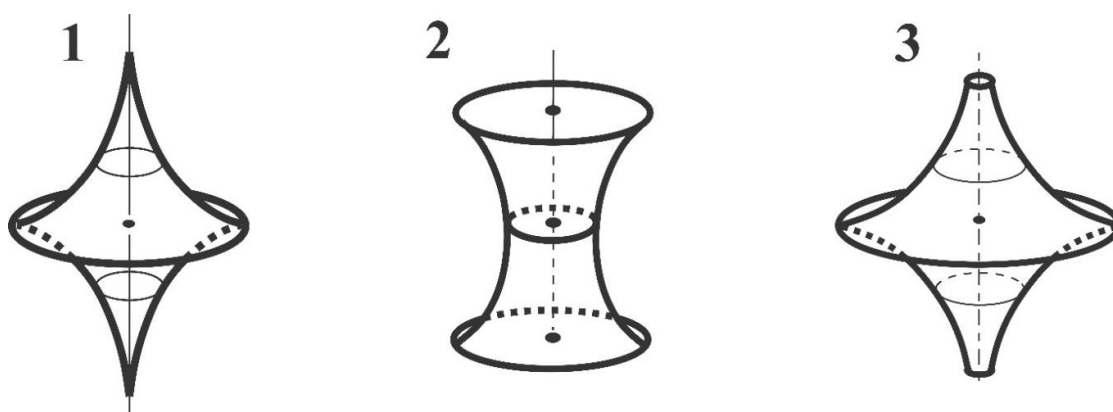


Рис. 2. Поверхности вращений, соответствующие трем типам меридиан (1 - Волчок Миндинга; 2 - Катушка Миндинга; 3 - Псевдосфера)

Углубленный анализ псевдосферы был проведен Э. Бельтрами в 1868 г. Он установил, что геометрия псевдосферы совпадает с геометрией определенной области на плоскости Лобачевского – орикруга.

Таким образом, благодаря появлению первых псевдосферических поверхностей, и в первую очередь псевдосфере, геометрия Лобачевского получила наглядный, реальный смысл: длины, углы, площади смогли теперь пониматься в смысле их естественно привычного измерения(например, на псевдосфере).

Результаты Ф. Миндинга и исследования Э. Бельтрами положили начало развитию нового раздела дифференциальной геометрии – исследованию и построению поверхностей отрицательной кривизны, особенно псевдосферических поверхностей. Например, применив преобразование Бэклунда к псевдосфере, ученые получили новые виды псевдосферических поверхностей [1].

В данной работе среди приведенных на рис. 2 поверхностей особую роль играет катушка Миндинга, уравнения которой могут быть представлены в виде:

$$X = \cos uChv, Y = \sin uChv, Z = -\int_0^v \sqrt{1 - Sh^2t} dt, \quad -\infty < u < +\infty, \quad -a \leq v \leq a.$$

Преобразуя эти уравнения с сохранением отрицательности кривизны, можно получить новую поверхность. Назавем ее *катушкообразной поверхностью*.

Теперь рассмотрим примеры построения некоторых катушкообразных поверхностей. По внешнему виду их можно разбить на три группы.

I. Обмотанные катушкообразные поверхности.

1. Дважды обмотанная: $X = (3\cos 2u - 0.3\cos 3u)Chv,$

$$Y = (3\sin 2u - 0.3\sin 3u)Chv, \quad Z = -\int_0^v \sqrt{1 - Sh^2t} dt, \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq 3 \text{ (Рис. 3).}$$

По известной формуле [4] $K = (LN - M^2)/(EG - F^2)$ вычислим гауссову кривизну:

$$K = \frac{-(74.43 - 27 \cdot \cos u)(18.27 - 4.5 \cdot \cos u)}{\{(36.81 - 10.8 \cdot \cos u)[(8.09 - 1.8 \cdot \cos u)Sh^2v + 1] - 0.81 \cdot \sin^2 u \cdot Sh^2v\}^2}$$

2. Трехжды обмотанная:

$$X = (1.2\cos 3u - 1/3\cos 4u)Chv, \quad Y = (1.2\sin 4u - 1/3\sin 4u)Chv, \quad Z = -\int_0^v \sqrt{1 - Sh^2t} dt, \\ 0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq 3 \text{ (Рис. 4).}$$



Рис. 3. Дважды обмотанная

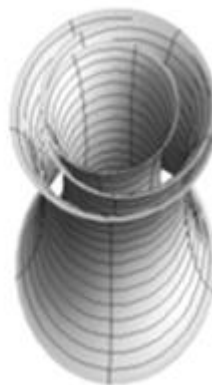


Рис. 4. Трехжды обмотанная

Аналогично можно построить поверхности и с большим числом обмоток.

II. Секционные катушкообразные поверхности.

1. Двусекционная: $X = (1.2\cos u - 0.4\cos 3u)Chv, Y = (1.2\sin 4u - 0.4\sin 3u)Chv,$

$$Z = -\int_0^v \sqrt{1 - Sh^2t} dt, \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq 3 \text{ (Рис. 5).}$$

2. Пятисекционная: $X = (1.2\cos u - 0.2\cos 6u)Chv, Y = (1.2\sin u - 0.2\sin 6u)Chv, Z = -\int_0^v \sqrt{1 - Sh^2t} dt, \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq 3 \text{ (Рис. 6).}$

3. Девятисекционная: $X = (1.2\cos u - 0.12\cos 10u)Chv, Y = (1.2\sin u - 0.12\sin 10u)Chv, Z = -\int_0^v \sqrt{1 - Sh^2t} dt, \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \quad 0 \leq v \leq 3 \text{ (Рис. 7).}$

Для этой поверхности Гауссова кривизна вычисляется по формуле:

$$K = \frac{-3.01132}{1.0318(1 + (-0.1288 - 0.8712\cos 9u)Sh^2v)^2}.$$

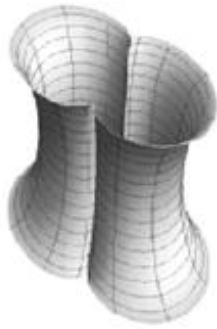


Рис. 5. Двухсекционная

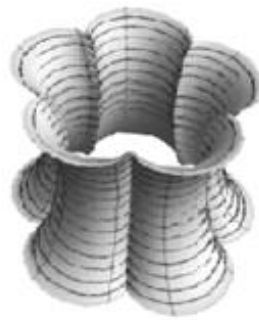


Рис. 6. Пятисекционная

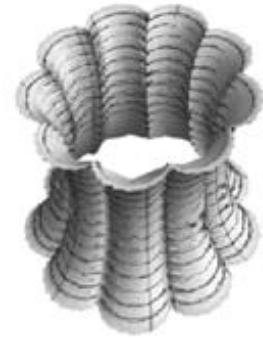


Рис. 7. Девятисекционная

Для каждой из указанных поверхностей, чтобы сохранилась отрицательность кривизны, можно определить связь между коэффициентами при тригонометрических функции в параметрических уравнениях.

III. Винтовые катушкообразные поверхности.

1. $X = \cos u \operatorname{Ch} v, Y = \sin u \operatorname{Ch} v, Z = 0.3u - \int_0^v \sqrt{1 - Sh^2 t} dt, 0 \leq u \leq 6\pi, 0 \leq v \leq 3$ (Рис. 8).

Параметрические уравнения можно записать в общем виде:

$$X = a \cos u \operatorname{Ch}(bv), \quad Y = a \sin u \operatorname{Ch}(bv), \quad Z = 0.3u - \int_0^v \sqrt{1 - Sh^2(bt)} dt, \quad 0 \leq u \leq 6\pi, \\ 0 \leq v \leq 3.$$

Для этой поверхности гауссова кривизна будет имеет вид:

$$K = \frac{-(b^2 + 0.09b^4 * \operatorname{Tanh}^4(bv))}{\{1 + 0.09b^2 * \operatorname{Tanh}^2(bv)\}^2}.$$

2. $X = \cos\left(\frac{3u}{2}\right) \operatorname{Ch} v, \quad Y = \sin\left(\frac{3u}{2}\right) \operatorname{Ch} v, \quad Z = 0.3u - \int_0^v \sqrt{1 - Sh^2 t} dt, \quad 0 \leq u \leq 6\pi, \\ 0 \leq v \leq 3$ (Рис. 9).

Параметрические уравнения можно записать в общем виде:

$$X = \cos(mu) \operatorname{Ch} v, \quad Y = \sin(mu) \operatorname{Ch} v, \quad Z = 0.3u - \int_0^v \sqrt{1 - Sh^2 t} dt, \quad 0 \leq u \leq 6\pi, \quad 0 \leq v \leq 3.$$

Для этой поверхности гауссова кривизна будет имеет вид:

$$K = \frac{-(1 + 0.09/m^2 * \operatorname{Tanh}^4(v))}{\{1 + 0.09/m^2 * \operatorname{Tanh}^2(v)\}^2}.$$

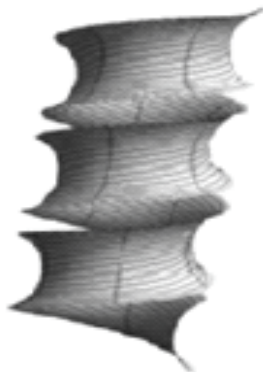


Рис. 8. Винтовая без самопересечении

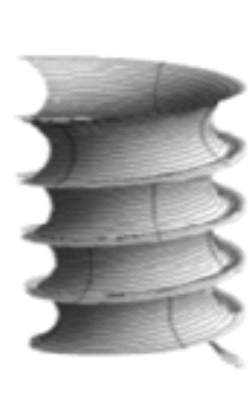


Рис. 9. Винтовая с самопересечением

Графические изображения этих поверхностей построены в среде WolframMathematica.

Список литературы

1. Попов А.Г. Псевдосферические поверхности и некоторые задачи математической физики // *Фундаментальная и прикладная математика*. Т. 11, 2005. № 1. С. 227-239.
2. Фоменко В.Т. Поверхности отрицательной кривизны // *Математика*. № 12, 1999. С. 103-108.
3. Позняк Э.Г., Шикин Е.В. Дифференциальная геометрия: Первое знакомство. М.: Изд-во МГУ, 1990. 384 с.