

# ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ДВУМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ФИЛЬТРОВ ШРЁДИНГЕРА В ЗАДАЧЕ УЛУЧШЕНИЯ ФОКУСИРОВКИ ТОЧЕЧНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Чапов А.А.<sup>1</sup>, Григоров И.В.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Чапов Антон Александрович – магистрант;

<sup>2</sup>Григоров Игорь Вячеславович – доктор технических наук, профессор,

кафедра теоретических основ радиотехники и связи,

Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики,

г. Самара

Нелинейные фильтры Шрёдингера (НФШ) представляют собой сравнительно новый класс устройств цифровой обработки сигналов и могут использоваться для решения различных радиотехнических задач, таких как подавление негауссовских импульсных помех [1], компенсация дисперсии сигналов [2] и др. Простейший одномерный НФШ состоит из двух последовательно соединенных звеньев – нелинейного (НЗ) и линейного (ЛЗ). Эти звенья имеют соответственно коэффициент преобразования мгновенных значений по комплексной огибающей  $Z(t)$ :

$$H(Z) = \exp(i f(Z)) \quad (1)$$

и импульсную характеристику:

$$g(t) = g_0 \exp\left(\frac{ia(t-t_0)^2}{2}\right), \quad (2)$$

здесь  $a$ ,  $g_0$ ,  $t_0$  – постоянные коэффициенты,  $f(Z)$  – функция, определяющая вид нелинейности фильтра. Из (2) следует, что ЛЗ реализует преобразование Френеля на временной оси. В операторной форме преобразование сигнала в НФШ можно записать:

$$\hat{z} = \Phi z = \mathbf{G}\mathbf{H}z, \quad (3)$$

где  $\mathbf{z}$  – вектор отсчетов входного сигнала  $z(t)$ ,  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{G}$  – операторы НЗ и ЛЗ,  $\Phi = \mathbf{G}\mathbf{H}$  – оператор НФШ в целом.

На рисунке 1 изображена структурная схема простейшего двухзвенного НФШ.

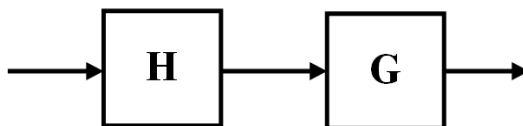


Рис. 1. Структурная схема двухзвенного НФШ

Наиболее просто его можно реализовать в цифровой форме путем обработки отсчетов комплексной огибающей входного сигнала. НЗ, независимо от вида функции  $f(Z)$ , входящей в (1), реализуется простым умножением этих отсчетов на комплексные числа, модуль которых равен единице, а аргумент зависит от модуля входного отсчета.

Линейное звено с импульсной характеристикой (2) физически не реализуемо. Для приближенного обеспечения его физической реализуемости в (2) необходимо ввести функцию окна  $g_0(t)$  и задержку  $t_0$ , которую обычно выбирают равной половине длительности окна (кроме того, временную переменную  $\tau$  заменим на  $t$ ):

$$g(t) = g_0(t) \exp\left(\frac{ia(t-t_0)^2}{2}\right), \quad (4)$$

Для примера на рисунке 2 изображены действительная и мнимая части импульсной характеристики ЛЗ, ограниченной модифицированным окном Ханна («hanning») [1].

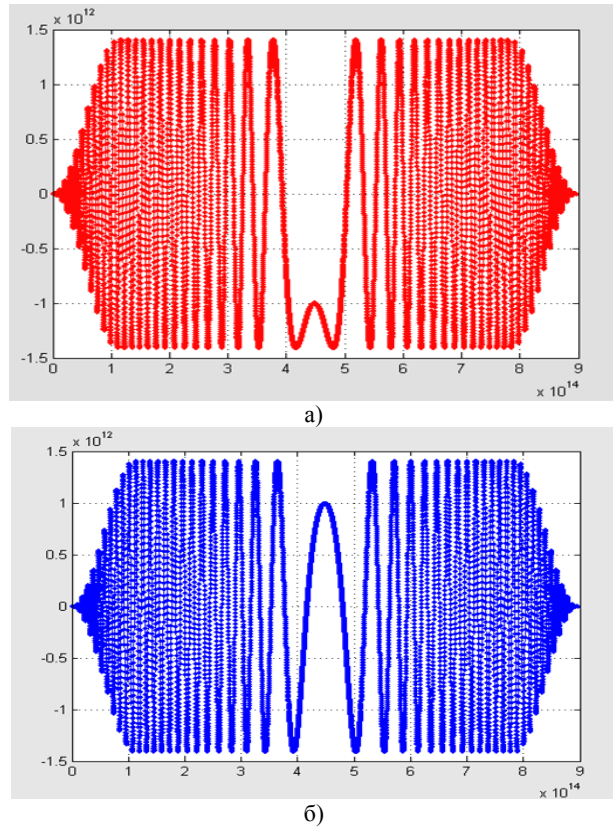


Рис. 2. Действительная (а) и мнимая (б) части импульсной характеристики линейного звена НФШ, ограниченных модифицированным окном Ханна

Работа НФШ основана на временном сжатии импульсных сигналов: НЗ развивает внутри импульса  $z(t)$  с комплексной огибающей  $Z(t)$  частотную модуляцию, закон изменения которой определяется формой входного импульса и функцией  $f(Z)$ , а ЛЗ – сжимает во времени модулированный импульс аналогично согласованному фильтру [3].

Как показано в [4], возможна и двумерная реализация НФШ. При этом коэффициент преобразования мгновенных значений НЗ вида (1) не изменяется, а двумерный аналог импульсной характеристики ЛЗ имеет вид:

$$g(x, y) = g_0 \exp\left(i \frac{a((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)}{2}\right). \quad (5)$$

При цифровой реализации двумерное ЛЗ (двумерное дискретное преобразование Френеля), также, как и в одномерном случае, удобнее реализовать, используя алгоритмы прямого и обратного двумерного БПФ [5].

В [4] двумерный вариант НФШ (ДНФШ) использовался для подавления импульсных помех на изображении. В [6] рассмотрена задача улучшения фокусировки точечных изображений с применением ДНФШ и решена задача его детерминированной оптимизации при гауссовской функции рассеяния точки (ФРТ). Поскольку параметры искажающей среды не являются постоянными, а флуктуируют случайным образом, возникает задача двумерной стохастической оптимизации параметров НФШ. Решим ее методом, описанным в [4]. В этой статье показано, что для минимизации размера элемента изображения на выходе двумерного НФШ требуется обеспечить максимум модуля его отклика в центре элемента изображения

$$V(x_0, y_0) = g_0 \iint_{(\eta, \xi)} Z(\eta, \xi) \exp\left\{i \left( f(Z(\eta, \xi)) + \frac{a(\eta^2 + \xi^2)}{2} \right)\right\} d\eta d\xi. \quad (6)$$

Этот максимум достигается при условии

$$f(Z(\eta, \xi)) + \frac{a(\eta^2 + \xi^2)}{2} = 0 \quad (7)$$

или, вводя обычные пространственные координаты,

$$f(Z(x, y)) = -\frac{a(x^2 + y^2)}{2}. \quad (8)$$

Из (8) следует, что вид оптимальной нелинейной функции  $f(Z)$  зависит от параметров ФРТ  $Z(x, y)$ . Если они случайные, необходимо искать максимум функционала (6) путем его усреднения с учетом их распределений. Удобнее решать эту задачу для квадрата величины (6), которая физически представляет собой пиковую мощность отклика в центре элемента изображения:

$$P_u = |V(x_0, y_0)|^2 = \int_R |g_0|^2 \int_T w(\Theta) \left| \int_T \exp \left\{ \frac{ia(x_0^2 + y_0^2)}{2} + i f[u(x_0, y_0, \Theta)] \right\} u(x_0, y_0, \Theta) dx dy \right|^2 d\Theta, \quad (9)$$

здесь  $W(\Theta)$  – многомерная плотность вероятности вектора случайных параметров,  $R$  – область их определения.

В этом случае задача оптимизации сводится к вариационной задаче поиска экстремума нелинейного функционала (9). Для практических целей можно ограничиться параметрической оптимизацией. Пусть искомая функция  $f(Z)$  аппроксимирована некоторым аналитическим выражением  $f(u, \beta)$ , содержащим вектор неизвестных параметров  $\beta$ . Подставляя указанное выражение в (9) и приравнявая к нулю его частные производные по параметрам  $\beta_k$ , получаем систему уравнений для их оптимальных значений

$$\int_R w(\Theta) \operatorname{Re} \int_X \int_Y \exp \{ i\Phi(x, \Theta) - i\Phi(y, \Theta) \} V(x, \Theta) V^*(y, \Theta) \times \quad (10)$$

$$\times \left[ \frac{\partial f[V(x, \Theta), \beta]}{\partial \beta_k} \right] dx dy d\Theta = 0,$$

где

$$\Phi(\xi, \Theta) = \frac{a\xi^2}{2} + f(V, \beta) + \varphi_V(t), \quad (11)$$

$k = 1, 2, \dots, n$ ;  $n$  – число параметров.

Одной из наиболее универсальных является аппроксимация искомой функции степенным полиномом:

$$f(V, \beta) = \sum_{k=1}^n \beta_k |V|^k. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (11) и линеаризуя полученные уравнения путем разложения экспоненты в ряд, после ряда преобразований можно получить систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} \beta_k = b_j \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (13)$$

где

$$a_{jk} = \operatorname{Re} \left\{ \int_X \int_Y \exp \left[ \frac{ia(x^2 - y^2)}{2} \right] [v_{j+k+2} - \mu_{j+k+2}] dx dy \right\} \quad (14)$$

$$b_j = \operatorname{Re} \left\{ i \int_X \int_Y \exp \left[ \frac{ia(x^2 - y^2)}{2} \right] \xi_{j+2} dx dy \right\}. \quad (15)$$

В (14) и (15) входят моментные функции

$$\mu_{j+k+2}(x, y) = \int_R |V(x, \Theta)|^{j+k} V(x, \Theta)^k V^*(y, \Theta) w(\Theta) d\Theta, \quad (16)$$

$$v_{j+k+2}(x, y) = \int_R |V(x, \Theta)|^j V(y, \Theta)^k V(x, \Theta) V^*(y, \Theta) w(\Theta) d\Theta \quad (17)$$

$$\xi_{j+2}(x, y) = \int_R |u(x, \Theta)|^j u(x, \Theta) u^*(y, \Theta) w(\Theta) d\Theta. \quad (18)$$

Аналитическое вычисление указанных моментных функций и коэффициентов (14) и (15) возможны только для ФРТ простых форм (например, гауссовской), а в общем случае затруднено, поэтому для их определения необходимо использовать численные методы. Затем также путем численного решения системы линейных алгебраических уравнений (13), определяется вектор оптимальных параметров  $\beta_{opt}$ . Для решения этой задачи можно применить классический метод градиентного поиска максимума по формуле

$$\beta_{i+1} = \beta_i + k(i) \left( \frac{dP_u}{d\beta} \right), \quad (19)$$

где  $\beta_i$  и  $\beta_{i+1}$  – векторы коэффициентов нелинейной функции на предыдущей и последующей итерациях, в фигурных скобках – градиент функционала (8) на  $i$ -й итерации:

$$\left\{ \frac{dP_u}{d\beta} \right\} = \left\{ \frac{dP}{d\beta_1}, \frac{dP}{d\beta_2}, \dots, \frac{dP}{d\beta_n} \right\}, \quad (20)$$

$k(i)$  – коэффициент, в общем случае зависящий от номера итерации. Для простоты в программе градиентного поиска этот коэффициент нужно выбрать постоянным и достаточно малым (например 0,1), что позволяет получить решение с необходимой точностью. Недостатком такого метода по сравнению с использованием адаптивного шага является некоторое увеличение времени вычислений, что не является существенным при использовании современных компьютеров.

Проверка рассмотренного алгоритма показала, что при вычислении величины (9) для логарифмической нелинейной зависимости  $f(Z)$  проигрыш по сравнению с полиномиальной составил всего 15%. Это говорит о том, что логарифмическая нелинейность близка к оптимальной не только при детерминированном характере ФРТ, но и при наличии случайных флуктуаций ее параметров. Этот же вывод подтверждает и рисунок 3, на котором видна существенная близость графиков полиномиальной (при оптимальном векторе параметров  $\beta_{opt}$ ) и логарифмической нелинейных функций.

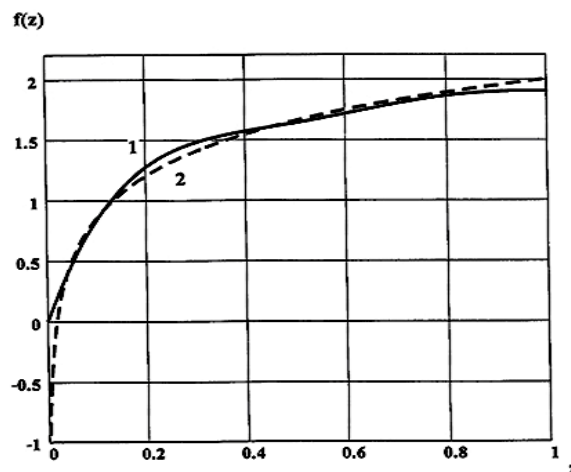


Рис. 3. Графики нелинейных функций  $f(Z)$  при полиномиальной (1) и логарифмической (2) аппроксимациях

Следует отметить, что вектор  $\beta$  является оптимальным только по частному критерию максимума показателя селективности (9).

#### Список литературы

1. Григоров И.В., Широков С.М. Применение теории нелинейных волновых процессов в радиотехнике и телекоммуникациях. М.: Радио и связь, 2006. 351 с.
2. Grigorov I.V. Adaptation of nonlinear phase filters to the bending around form of the signal at compensation

of the dispersion in fiber-optical transmission lines. // Optical Technologies for Telecommunications 2005 Proceedings of SPIE. Vol. 6277.

3. *Кловский Д.Д.* Теория электрической связи. М.: Радиотехника, 2009. 647 с.
4. *Широков С.М., Григоров И.В.* Метод подавления импульсных помех при обработке сигналов и изображений // Компьютерная оптика - 1996. Вып.16. С. 97-102.
5. *Ярославский Л.П.* Цифровая обработка сигналов в оптике и голографии М.: Радио и связь, 1987. 296 с.
6. *Григоров И.В., Абышкина К.И.* Применение двумерных нелинейных фазовых фильтров для улучшения фокусировки радиолокационных и оптических изображений // Радиотехнические и телекоммуникационные системы. 2011. № 4. С. 50-53.