РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА RADIX-2(k) ДЛЯ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ С ПРОРЕЖИВАНИЕМ ПО ЧАСТОТЕ НА ПЛИС

Гасилин Д.В.[1], Котельников В.Г.[2]

[1]Гасилин Дмитрий Вадимович – инженер,
АО «ЦКБА»,
аспирант,
Омский государственный технический университет;
[2]Котельников Вадим Григорьевич - ведущий инженер,
ИЦ «Автоматика»,
г. Омск

Аннотация: *в данной статье рассматривается алгоритм предварительной фильтрации на основе алгоритма Кули-Тъюки, который позволяет эффективным образом организовать вычисления дискретного преобразования Фурье в случае, когда N является степенью 2. Производится анализ и обобщение алгоритма для требуемой длины N для реализации его структуры на ПЛИС. Показывается возможность реализации алгоритма Radix-2(k) для быстрого преобразования Фурье (БПФ) с прореживанием по частоте на ПЛИС.*
Ключевые слова: *быстрое преобразование Фурье, дискретное преобразование Фурье, алгоритм Кули-Тьюки, Radix-2(k), ПЛИС.*

Для многих задач связи, радиолокации, радиомониторинга одним из важнейших свойств является возможность обработки сигналов в широкой полосе частот (в настоящее время требуется сотни МГц). Естественно, что современные требования к широкополосности цифровых систем радиочастотной обработки вызвало стремительный рост тактовых частот не в ущерб увеличению разрядности аналого-цифровых преобразователей – первого ключевого элемента этих систем, вторым ключевым элементом является вычислитель на программируемых логических интегральных схемах – ПЛИС. Стремление удовлетворить эти требования привело к развитию цифровых алгоритмов радиочастотной обработки [1, 2]. В данной статье будет рассмотрена предварительная фильтрация, а именно быстрое преобразование Фурье (БПФ) по основанию 2^2 (Radix-2(k)) с прореживанием по частоте и показана возможность его реализации на ПЛИС.

Рассмотрим N-точечное дискретное преобразование Фурье входной последовательности отсчетов x[n]:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk}, k = 0,1, \dots, N-1$$

$$W_N^{nk} = e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)nk} \qquad (1)$$

Алгоритм Кули-Тьюки [3] позволяет эффективным образом организовать вычисления дискретного преобразования Фурье в случае, когда N является степенью 2.

Порядок отсчетов на входе – последовательный, на выходе – бит-реверсный. Ниже приведены операции вычислений 2-точечного преобразования Фурье, далее в тексте – «бабочка».

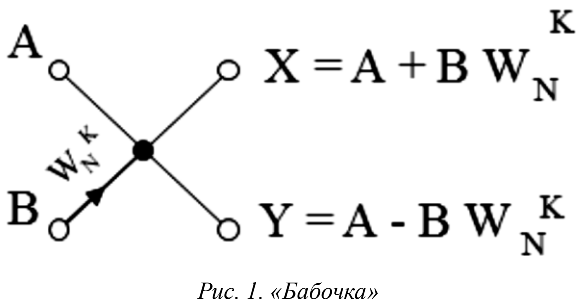


Рис. 1. «Бабочка»

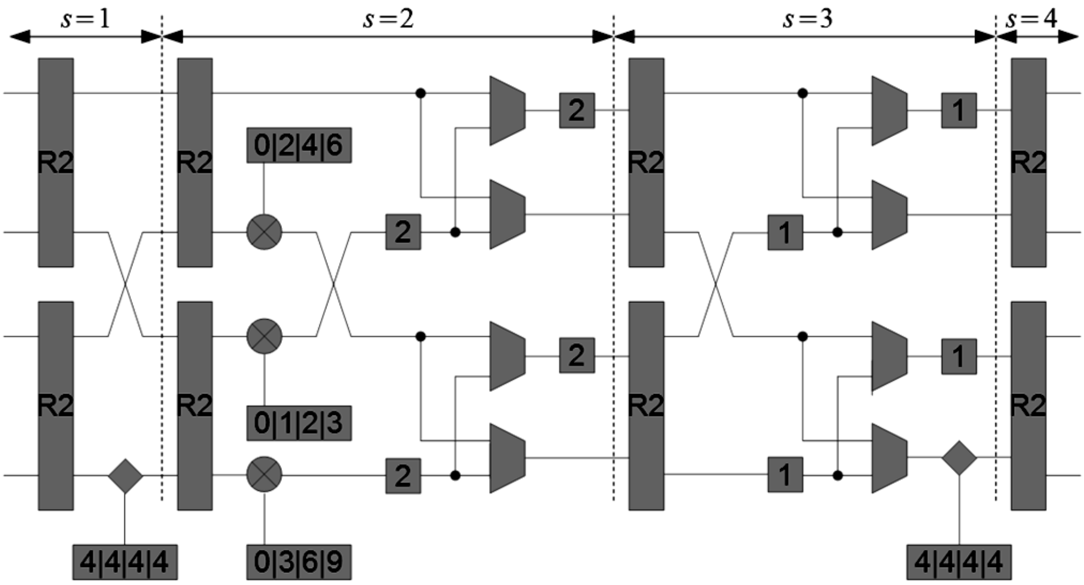
В случае, если $\phi \epsilon [0, \frac{N}{4}, \frac{N}{2}, \frac{3N}{4}]$, повороты являются тривиальными и осуществляются перестановкой вещественных/мнимых частей и/или сменой соответствующих знаков. Переход к алгоритму по основанию 2^2 осуществляется разбиением угла поворота в нечетных шагах на сумму тривиального (кратного N/4) и нетривиального $\phi' = \phi \bmod N/4$ с переносом последнего на следующий шаг. Это возможно, так как на каждом шаге алгоритма по основанию 2 поворотные углы в каждой из «бабочек» ϕ_A, ϕ_B отличаются либо на 0, либо на N/4. Поэтому при выборе $\phi_A = \phi', \phi_B = \phi' + N/4$ поворотный коэффициент можно перенести на следующий шаг преобразования:

$$Ae^{-j\frac{2\pi}{N}\phi'} \pm Be^{-j\frac{2\pi}{N}(\phi'+N/4)} = [A \pm (-j)B]e^{-j\frac{2\pi}{N}\phi'} \qquad (2)$$

В левой части приведены вычисления по основанию 2, в правой — по основанию 2^2, (A, B) – входные данные «бабочки». В алгоритме по основанию 2 числа (A, B) поворачиваются до вычисления результата «бабочки», в алгоритме по основанию 2^2 B поворачивается на тривиальный угол, а оставшаяся часть переносится на следующий шаг.

Обобщить алгоритмы по основанию 2^2 на любую необходимую длину N можно, основываясь на следующем их свойстве: в любой «бабочке» вычисления проводятся с отсчетами, бинарное представление индексов которых, отличается только в бите b_{n-s} ($n = log_2 N$, n – номер шага). Тривиальные повороты (производимые на нечетных шагах s) осуществляются для отсчетов с индексами, удовлетворяющими условию $b_{n-s} \wedge b_{n-s-1} = 1$. Нетривиальные повороты (производимые на четных шагах) – для отсчетов с индексами, удовлетворяющими условию $b_{n-s+1} \vee b_{n-s} = 1$ [4].

На рисунке 2 приведена схема организации операций 4-потокового 16-точечного быстрого преобразования Фурье по основанию 2^2 с прореживанием по частоте.



3	2	1	0
11	10	9	8
7	6	5	4
15	14	13	12

3	2	1	0
7	6	5	4
11	10	9	8
15	14	13	12

9	8	1	0
11	10	3	2
13	12	5	4
15	14	7	6

12	8	4	0
13	9	5	1
14	10	6	2
15	11	7	3

Рис. 2. Схема организации операций 4-потокового 16-точечного БПФ по основанию 2^2 с прореживанием по частоте

Элементами схемы являются «бабочки» по основанию 2, тривиальные (ромб) и нетривиальные умножители, а также блоки попарных перестановок, состоящие из буферов (глубина показана цифрой) и мультиплексоров. Порядок прохождения отсчетов через соответствующие «бабочки» показан в таблицах: так на первом тактовом интервале на вход поступают отсчеты 0, 8, 4, 12; отсчеты 8, 9, 10, 11 последовательно поступают на второй вывод. Нетрудно видеть, что в данном порядке вычислений выполнены свойства алгоритмов по основанию 2^2. Так в верхней «бабочке» на первом шаге производятся операции с парами отсчетов (0,8), (1,9), (2,10), (3,11), бинарное представление которых отличается в бите $b_{n-s} = b_{4-1} = b_3$ (3-й бит, нумерация с нуля); это же верно и для остальных «бабочек». Тривиальные повороты осуществляются только на нечетных шагах s и затрагивают только те отсчеты, индексы которых удовлетворяют условию $b_{n-s} \wedge b_{n-s-1} = 1$; в частности на первом шаге это выполнено для отсчетов $b_3 \wedge b_2 = 1$, то есть 12, 13, 14, 15. В свою очередь нетривиальные умножения требуются только для отсчетов с индексами, удовлетворяющими $b_{n-s+1} \vee b_{n-s} = 1$, поэтому на втором шаге не требуется выполнять поворот на нетривиальный угол в верхнем плече, так как для поступающих туда отсчетов $b_{n-s+1} \vee b_{n-s} = b_3 \vee b_2 = 0$.

Заключение

Был рассмотрен алгоритм предварительной фильтрации на основе алгоритма Кули-Тьюки, который позволяет эффективным образом организовать вычисления дискретного преобразования Фурье в случае, когда N является степенью 2. Произведены анализ и обобщение алгоритма для требуемой длины N для реализации его структуры на ПЛИС. Показана возможность реализации алгоритма Radix-2(k) для быстрого преобразования Фурье с прореживанием по частоте на ПЛИС.

Список литературы

1. *Zoltowski M.D., Mathews C.P.* Real-Time Frequency and 2-D Angles Estimation with Sub-Nyquist Spatio-Temporal Sampling // IEEE Transactions on Signal Processing, (42), 10, 2781-2794, 1994.
2. *Schmidt R.O.* Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation // IEEE Trans. Antennas Propagation, (AP-34), 276-280, 1986.
3. *Cooley J.W., Tukey J.W.* An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series // Math. Comput. 19:297-301, 1965.
4. *Mario Garrido Gálvez, J Grajal, MA. Sanchez, Oscar Gustafsson.* Pipelined Radix-2(k) Feedforward FFT Architectures // IEEE Transactions on Very Large Scale Integration Systems, (21), 1, 23-32, 2013.